Die lineare Funktion

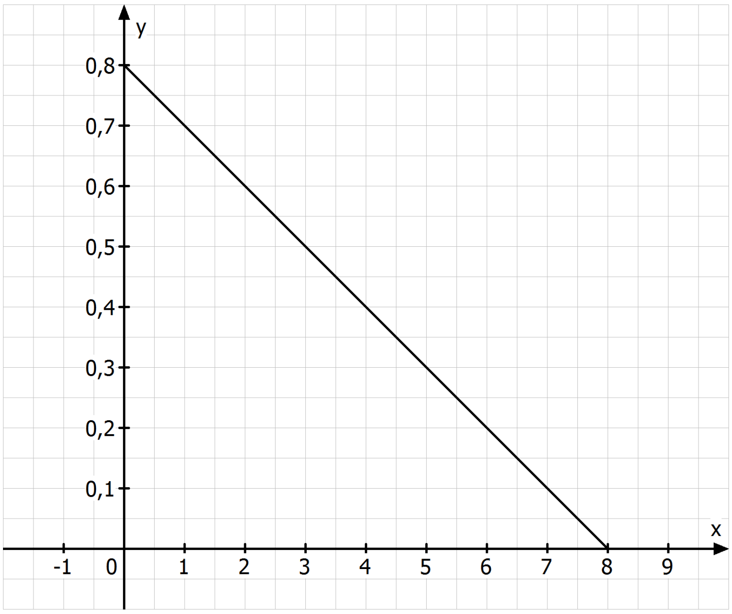
Beispiel:

Bei einem ins Krankenhaus eingelieferten Patienten wird im Blut eine Alkoholkonzentration von 0,8 ‰ festgestellt. Eine Faustregel besagt, dass pro Stunde ungefähr 0,1 Promille abgebaut werden.
Ermitteln Sie, nach wie vielen Stunden der Alkohol vollständig abgebaut ist.

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Graph:



Eine Gerade, die im Punkt P(0/t) die y-Achse schneidet, ist der Graph einer Funktion mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto m \cdot x + t$.

Solche Funktionen heißen lineare Funktionen.

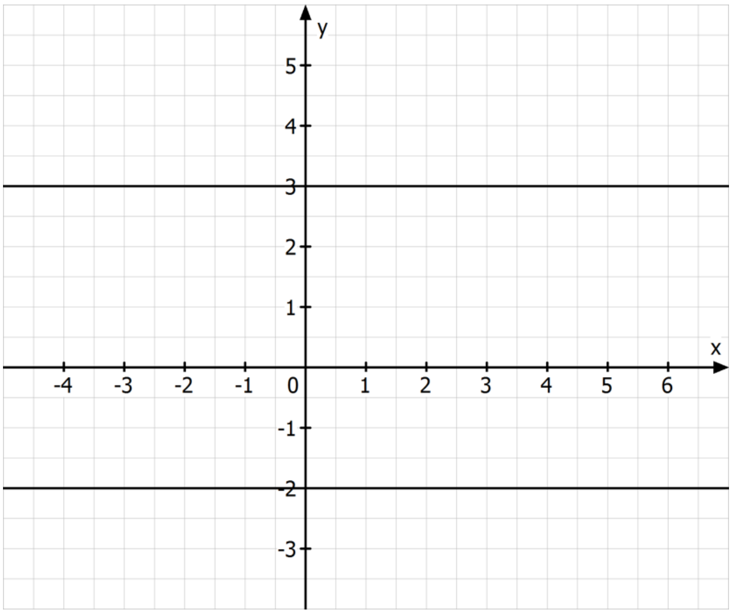
Beispiele:

1) t = 0:

$x \mapsto m \cdot x + 0 \quad \Rightarrow x \mapsto m \cdot x$

Lineare Funktionen mit t = 0 verlaufen durch den Ursprung, sind also Ursprungsgeraden.

2) m = 0



3.0 Ein Taxifahrer berechnet 1,50 € je gefahrenen Kilometer und eine Grundgebühr von 4,00 €.

3.1 Berechnen Sie, wie viel eine Fahrt von 8 km Länge kostet.
3.2 Ermitteln Sie, wie weit man für 11,50 € fahren kann.
3.3 Zeichnen Sie den Graphen der Weg – Preis Funktion in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

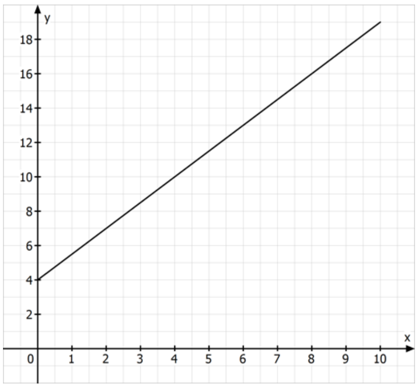
a) $f: x \mapsto 1{,}50 \cdot x + 4$

$\Rightarrow y = 1{,}50 \cdot 8 + 4 \quad \Rightarrow y = 16$

$\Rightarrow$ eine Fahrt von 8 km Länge kostet 16 €.

b) $1{,}50 \cdot x + 4 = 11{,}50 \quad \Rightarrow 1{,}50x = 7{,}50 \quad \Rightarrow x = 5$

$\Rightarrow$ für 11,50 € kann man 5 km fahren c)

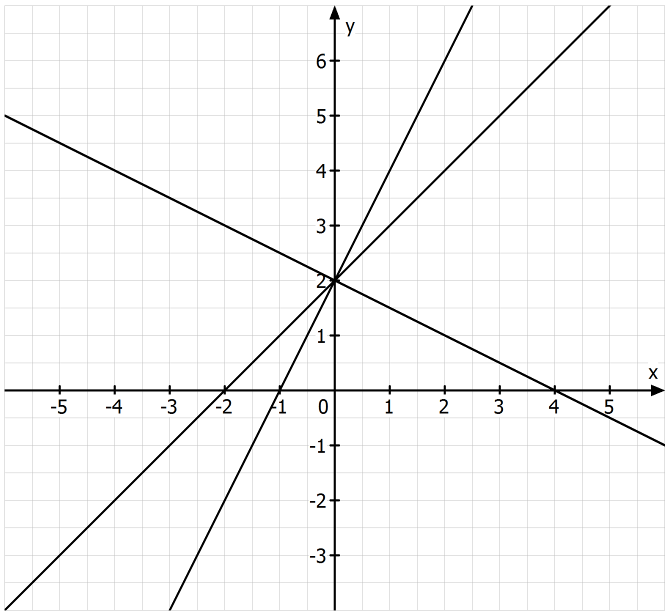


4 Zeichnen Sie die Graphen der folgenden linearen Funktionen in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

$f(x) = x + 2$

$g(x) = 2x + 2$

$h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$



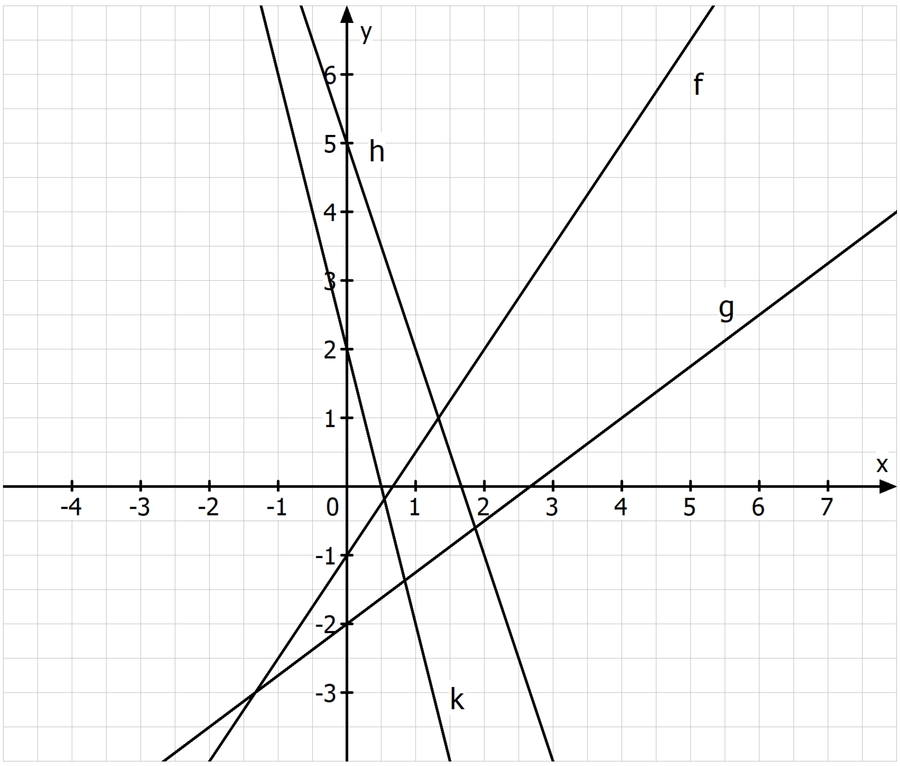
Den Graph einer linearen Funktion $f: x \mapsto m \cdot x + t$ ist eine Gerade mit der Steigung m.

Sie geht durch den Punkt P(0/t) der y-Achse.

t heißt y-Achsenabschnitt.

Aufgabe:

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f, h, g und k mit $f(x)=\frac{3}{2}x-1$, $h(x)=-3x+5$, $g(x)=\frac{3}{4}x-2$ und $k(x)=2-4x$ mit Hilfe von Steigungsdreiecken in ein kartesisches Koordinatensystem ein.



Aufgaben:

1 Bestimmen Sie die x-Werte der Punkte $A(x_A/5)$ und $B(x_B/-7)$ so, dass diese auf dem Graphen der linearen Funktion g mit g(x) = 2x + 1 liegen.

2 Prüfen Sie durch Rechnung, welche der Punkte P(5/-9), Q(-3/6) und S(2,5/-3,5) auf dem Graphen der Funktion g mit g(x) = -2x + 1 liegen.

3.0 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der folgenden Funktionen mit den Koordinatenachsen.

3.1 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$

3.2 $f(x)=\frac{2}{5}x+3$

4 Geben Sie die Funktionsgleichung einer Funktion h an, die zur Funktion g mit g(x) = 1,5x - 3 parallel ist und die y-Achse bei -2 schneidet.

Lösungen:

1. $2x+1=5 \quad \Rightarrow x=2 \quad \Rightarrow A(2/5)$
$2x+1=-7 \quad \Rightarrow x=-4 \quad \Rightarrow B(-4/-7)$

2. $-2\cdot 5+1=-9 \quad \Rightarrow P\in g$
$-2\cdot(-3)+1=7 \quad \Rightarrow Q\notin g$ Q liegt unterhalb der Geraden g
$-2\cdot 2{,}5+1=-4 \quad \Rightarrow S\notin g$ S liegt oberhalb der Geraden g

3.1 $y=\frac{1}{2}\cdot 0+2=2 \quad \Rightarrow S_y(0/2)$
$\frac{1}{2}x+2=0 \quad \Rightarrow x=-4 \quad \Rightarrow N(-4/0)$

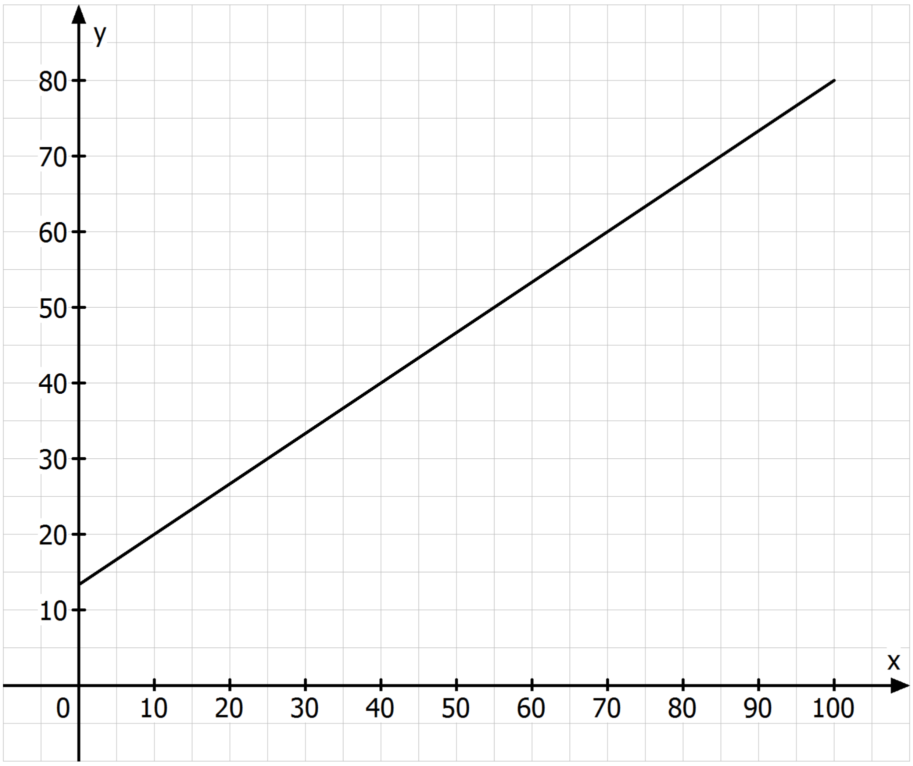
3.2 $y=\frac{2}{5}\cdot 0+3=3 \quad \Rightarrow S_y(0/3)$
$\frac{2}{5}x+3=0 \quad \Rightarrow x=-7{,}5 \quad \Rightarrow N(-7{,}5/0)$

4. $y=mx+t$
$m=1{,}5$ zwei Geraden sind dann parallel, wenn die Steigungen gleich sind
$y=1{,}5x-2$

Aufstellen linearer Funktionsterme

Beispiel:

In einer Regentonne befinden sich zehn Minuten nach Beginn eines heftigen Regenschauers 20 Liter Wasser, nach vierzig Minuten befinden sich in der Tonne 40 Liter Wasser.



Bestimmung des Funktionsterm zu diesem Funktionsgraphen:

y = mx + t

Bestimmung von m: $m = \frac{40-20}{40-10} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Bestimmung von t: P_1 oder P_2 in die Funktionsgleichung einsetzen

$20 = \frac{2}{3} \cdot 10 + t \quad \Rightarrow t = \frac{40}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{40}{3}$

> Geht der Graph einer linearen Funktion $f: x \mapsto m \cdot x + t$ durch die Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$, so bestimmt man zunächst m aus $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
>
> Danach ergibt sich t aus $m \cdot x_1 + t = y_1$ (oder aus $m \cdot x_2 + t = y_2$)

Aufgaben:

1 Bestimmen Sie den Funktionsterm der linearen Funktion f, die durch die Punkte $P_1(2/3)$ und $P_2(5/6)$ geht.

$$y=mx+t$$
$$m=\frac{6-3}{5-2}=\frac{3}{3}=1 \quad \Rightarrow y=x+t$$
$$P_1 \text{ einsetzen: } \; 3=1\cdot 2+t \quad \Rightarrow t=1$$
$$\Rightarrow y=x+1$$

2 Bestimmen Sie den Funktionsterm der linearen Funktion g mit der Steigung 1,5, die durch den Punkt P(2/4) geht.

$$y=1{,}5x+t$$
$$P \text{ einsetzen: } \; 4=1{,}5\cdot 2+t \quad \Rightarrow t=1$$
$$\Rightarrow y=1{,}5x+1$$

3 Bestimmen Sie den Funktionsterm der linearen Funktion f, die auf der Geraden g mit g: y = 1,5 x – 3 senkrecht steht und durch den Punkt Q(-1/1) verläuft.

Bedingung für zwei Geraden, die aufeinander senkrecht stehen: $m_1 \cdot m_2=-1$

$$m_f \cdot m_g=-1 \quad \Rightarrow m_f \cdot 1{,}5=-1 \quad \Rightarrow m_f=-\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow f: y=-\frac{2}{3}x+t$$
$$\Rightarrow Q(-1/1) \text{ einsetzen: } \; 1=-\frac{2}{3}\cdot(-1)+t \quad \Rightarrow t=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow f: y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

4 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte zwischen den Geraden $g: y=-\frac{5}{4}x-4$ und $h: y=-\frac{5}{4}x-2$ bzw. zwischen den Geraden $h: y=-\frac{5}{4}x-2$ und $f: y=2x+2{,}5$.

$$g \cap h \quad \Rightarrow g=h \quad \Rightarrow -\frac{5}{4}x-4=-\frac{5}{4}x-2 \quad \Rightarrow 0=2 \;\text{ (f)}$$
$\Rightarrow$ die Geraden g und h schneiden sich nicht; g und h verlaufen parallel;

$$h \cap f \quad \Rightarrow h=f \quad \Rightarrow -\frac{5}{4}x-2=2x+2{,}5 \quad \Rightarrow -4{,}5=3{,}25x \quad \Rightarrow x=-\frac{18}{13}$$
$$x=-\frac{18}{13} \text{ in f (oder h): } y=2\cdot\left(-\frac{18}{13}\right)+2{,}5=-\frac{7}{26} \qquad \Rightarrow S\left(-\frac{18}{13}/-\frac{7}{26}\right)$$